FUNDACIÓN CHAMINADE
Colegio Parroquial
de San Miguel
Departamento de Matemática

"EL SÍ DE LA FAMILIA MARIANISTA"

UNIDAD 0 - Guía de ejercicios 02 III$^{\text{ro}}$ MEDIO B

Temas: Variables aleatorias finitas - Regla de Laplace

19 de marzo, 2020

Nombre: ______________________________

En esta Guía de Ejercicios, se desarrollarán los siguientes **Objetivos de Aprendizajes** correspondiente a la Unidad 0 (año anterior):

OA10. *Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas:*
- *Definiendo la variable.*
- *Determinando los posibles valores de la incógnita.*
- *Calculando su probabilidad.*
- *Graficando sus distribuciones.*

OA11. *Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.*

OA12. *Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad:*
- *Revisando informaciones de los medios de comunicación.*
- *Identificando suposiciones basadas en probabilidades.*
- *Explicando cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas.*
- *Explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades.*

Coloque esta guía y el desarrollo (corcheteado) en su **portafolio** (carpeta). Recuerde que el portafolio en su conjunto representa una calificación al final del trimestre. Los aprendizajes resultantes del desarrollo adecuado de esta guía serán evaluados en una **prueba individual** que será agendada al regreso de las clases presenciales.
Toda consulta, duda o pregunta que tenga a partir del desarrollo de este trabajo lo puede realizar en la clase virtual de **Google Classroom** cuyo código es `ex4uizj`. En esta sala virtual encontrará también la Guía 01 que fue trabajada en clases, y que puede descargar para su estudio personal. Dicha guía, y su desarrollo, también deben estar en el portafolio.

Un poco de teoría.

En esta Guía, se consideran los símbolos $\mathbb{P}$ para probabilidad, $\mathbb{R}$ para el conjunto de los números reales, y $\mathbb{N}$ para los números naturales (enteros positivos).

Variable aleatoria. Sea Ω el **espacio muestral** asociado a un cierto experimento (recordemos que Ω está compuesto de todos los resultados posibles del experimento, a partir de cierto modelo asociado). Una **variable aleatoria** es cualquier función $X : \Omega \to \mathbb{R}$. En otras palabras, una variable aleatoria toma cualquier elemento de Ω y le asigna un número real. Por ejemplo, en el experimento *lanzamiento de dos dados normales*, podemos modelar el espacio muestral como pares ordenados, $\Omega = \{(1,1); (1,2); (1,3); \cdots; (6,4); (6,5); (6,6)\}$. Si estamos interesados en la suma de puntos al lanzar dos dados normales, entonces podemos definir la variable aleatoria X como $X(a,b) = a + b$. Así, $X(4,6) = 10$.
Una variable aleatoria se dirá **discreta**, y se abrevia vad, si los resultados de X, es decir el conjunto imagen $X(\Omega)$, se pueden enumerar de uno en uno, como si fuera un conjunto finito o parecido a $\mathbb{N}$; esto ocurre típicamente cuando queremos *contar* (como en el ejemplo anterior) sobre Ω. Ejemplos son la cantidad de lápices dentro de un estuche, las personas que asisten a un concierto, etc.
Por otro lado, una variable aleatoria se dirá **continua** si $X(\Omega)$ es similar a un intervalo en $\mathbb{R}$; esto ocurre cuando X pretende *medir* sobre Ω. Ejemplos son la duración de una película, la estatura de los alumnos de un curso, etc.

Función de probabilidad de una vad. Sea X una vad sobre el espacio muestral Ω. Se define la **función de probabildiad** de X como aquella función que asigna una probabilidad a los elementos de (la imagen de) X a partir de los elementos de Ω. En otras palabras, es una función $f : X \to [0,1]$ definida por $f(a) = \mathbb{P}(X = a)$.
En el ejemplo anterior del lanzamiento de dos dados y la suma de puntos obtenidos, se tiene que $X(a,b) = a+b$, y por tanto $X = \{2,3,4,\cdots,10,11,12\}$. En este caso, se puede calcular cada $f(a)$, para $a = 2,3,4,\cdots,11,12$. Por ejemplo, $f(2) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\text{obtener el par } (1,1)) = \frac{1}{36}$, pues hay sólo un caso posible en el que la suma X vale 2,

que es en el par ordenado $(1,1)$. Por otro lado, $f(10) = \mathbb{P}(X = 10) = \mathbb{P}(\text{obtener } (4,6) \text{ o bien } (5,5) \text{ o bien } (6,4)) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.
Siempre se cumple que $\sum_{a \in X} f(a) = 1$, es decir, la suma de todas las probabilidades tiene que dar 1.

Regla de Laplace. Esta regla nos permite calcular (asignar) probabilidades a **eventos** dentro de un espacio muestral Ω finito. Recordemos que un evento es cualquier subconjunto o parte de Ω.
Sea E un evento dentro de Ω, que se anota $E \subseteq \Omega$. Entonces, se tiene que

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{cantidad de elementos de } E}{\text{cantidad de elementos de } \Omega} = \frac{\#E}{\#\Omega}.$$

Es lo que coloquialmente se parafrasea diciendo que *la probabilidad de E es igual a la división de los casos favorables de E versus los casos totales de Ω.*

Ejercicios y problemas.

1. **[PSU]** Un estuche contiene sólo 8 lápices del mismo tipo, de los cuales 3 son azules y 5 son rojos. Si se extraen simultáneamente, al azar, 4 lápices del estuche y se define la variable aleatoria X como el *número de lápices azules extraídos*, ¿cuáles son todos los posibles valores de X? Justifique.

2. **[PSU]** Si X es la variable aleatoria "número de caras obtenidas al lanzar tres monedas," ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
   (a) X es una variable aleatoria discreta
   (b) El espacio muestral de X tiene cardinalidad 8
   (c) El recorrido de X es $\{0, 1, 2, 3\}$
   (d) Hay tres sucesos asociados al valor 3
   (e) Al suceso "obtener tres sellos" se le asocia el valor 0

   Justifique su respuesta.

3. Sea X una vad con función de probabilidad f definida por

a	-1	0	1	2
$f(a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	x	$\frac{1}{2}$

   y $f(a) = 0$ para cualquier otro valor de a. Determine el valor de x y grafique la función f.

4. La siguiente tabla muestra la función de probabilidad y **distribución**, para una vad $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

k	$\mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{P}(X \leq k)$
0	$0,02$	$0,02$
1	$0,18$	$0,2$
2	$0,15$	b
3	a	$0,8$
4	$0,2$	1

   Describa con sus palabras el significado de la **función distribución** para una vad. Determine los valores de a y b. Justifique.

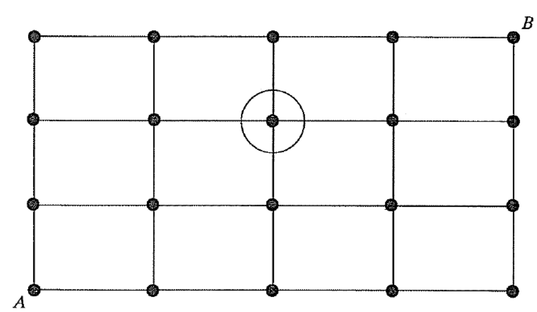
5. Se saca una carta al azar de un mazo de naipe inglés de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea un 7?

6. Determine la probabilidad de ganarse el *Loto*, si se compra un juego sencillo. Justifique.

7. Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 se construyen todos los números de tres cifras distintas, y cada uno de ellos se anota en una papel que se deposita dentro de una urna. Luego, se extrae un papel al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el número obtenido sea par? Justifique.

8. Una urna contiene ocho bolitas negras y tres bolitas blancas. Si sacamos dos bolitas, sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

9. Considere el reticulado de puntos que se muestra a continuación. Suponga que comenzando desde el punto A se desea llegar hasta el punto B, con los dos únicos movimientos posibles: un paso a la derecha, o un paso hacia arriba. ¿Cuál es la probabilidad de que un camino así pase por el punto destacado en el reticulado?



10. Busque en la prensa (escrita, medios digitales) de los últimos días alguna noticia que haga uso explícito de elementos del cálculo de probabilidades, y comente las herramientas utilizadas en dicho texto. Puede utilizar, por ejemplo, las noticias referidas a la propagación del COVID-19 y cómo las decisiones de las autoridades se sostienen en la probabilidad de contagio de la población.
    La noticia y su comentario deben ir adjuntadas en el desarrollo de esta guía.