GUÍA DE APRENDIZAJE: LÍMITES, DERIVADAS E INTEGRALES

OPERANDO CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

ACTIVIDAD PORTAFOLIO N°1

Nombre : ……………………………………………………………..**Curso:** III° Medio A y B ELECTIVO

Objetivos de Aprendizaje: Aplicar diversos métodos de factorización y manejo algebraico para operar con fracciones algebraicas

Tema: Operatoria con fracciones algebraicas

Instrucciones: La guía que verás a continuación tiene el carácter de teórico- práctica por eso su extensión. Ella nos permitirá avanzar a pesar de no estar reunidos presencialmente. Por esta razón te animo a realizar la lectura comprensiva de ella y, en la medida que vayas comprendiendo los ejemplos, puedas realizar los ejercicios que se plantean.

La idea es que puedas desarrollar los ejercicios propuestos en hojas cuadriculadas en el mismo orden en que están planteados para luego adjuntar a nuestro "portafolio" como primera actividad.

Evaluación: Al volver a clases les pido presentar su actividad en el formato que les expliqué. Una carpeta con el trabajo adjunto para su revisión y calificación. Esta será la primera nota de nuestro portafolio y el desarrollo de los ejercicios aportará en el estudio personal para la primera prueba que habíamos acordado.

Manos a la obra…

1. Introducción

El manejo algebraico es una herramienta básica que nos permite comunicar ideas en el ambiente científico sin importar la lengua que ellos manejen. Aprender a leer, escribir y operar con álgebra es el símil a aprender a leer y escribir la lengua materna para comunicarnos con nuestros pares. En esta oportunidad abordaremos la relación entre la operatoria con fracciones y la operatoria con expresiones fraccionarias; la resolución de desafíos y problemas no rutinarios que involucren sustitución de variables por dígitos y/o números; expresiones algebraicas fraccionarias simples, (con binomios o productos notables en el numerador y en el denominador); y la simplificación, multiplicación y adición de expresiones algebraicas fraccionarias simples.

2. Expresiones algebraicas fraccionarias

Se denominan expresiones algebraicas **fraccionarias** o fracciones algebraicas al cociente entre dos expresiones algebraicas. La más simple de todas las fracciones algebraicas puede ser $\frac{a}{b}$ donde a es el numerador y b el denominador distinto de cero.

Todas las propiedades de la aritmética se heredan en las fracciones algebraicas pero de manera genérica. Una de las cosas básicas que debemos tener en cuenta es que toda expresión algebraica puede escribirse como una fracción algebraica de denominador 1. Por ejemplo, $3x^2 - 2x + 1$ puede escribirse como:

$$\frac{3x^2 - 2x + 1}{1}$$

A esta expresión algebraica se le denomina **entera** por carecer de denominador literal. Otros ejemplos de expresiones algebraicas enteras son:

$$x + y, \quad \frac{1}{2}a^2 + \frac{4}{3}b^2, \quad x^3 \quad \text{y} \quad \frac{x^3 + bx + c}{15}$$

Otro tipo de expresión algebraica al que nos podemos enfrentar es aquella que se compone de una parte entera y otra fraccionaria. Por lo mismo en varios textos se les llama **mixtas**. Algunos ejemplos son:

$$x + \frac{y}{z}, \quad \frac{x}{x^2 - 1} + y^2 - 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}a - \frac{5}{1 - a}$$

Simplificación de fracciones

Cuando hablamos de simplificar una expresión fraccionaria nos referimos a reescribirla en una forma más compacta pero sin cambiar su valor. En el caso de las fracciones algebraicas lo que se busca es que el numerador y denominador sean primos entre sí[1]. A las fracciones con ésta característica se les llama **irreductible** y es la forma más simple para poder expresarlas.

3.1. Simplificación de monomios

Recordemos que la fracción es una forma de representar una división y por lo tanto, todo lo que sabemos sobre división es válido en este contexto. En particular recordemos las propiedades de las potencias y la descomposición prima de los números con el siguiente ejemplo:

✎ ***Ejemplo***

1. *Simplificar* $\dfrac{9x^2y^3}{24a^2x^3y^4}$

Solución: La idea es realizar las mismas operaciones en el numerador y denominador, y usar las propiedades de las potencias de igual base que se dividen. El primer paso será simplificar 9 y 24 por 3 y luego restamos los exponentes de las potencias con igual base.

$$\begin{aligned}\frac{9x^2y^3}{24a^2x^3y^4} &= \frac{3x^2y^3}{8a^2x^3y^4}\\ &= \frac{3x^{2-3}y^{3-4}}{8a^2}\\ &= \frac{3x^{-1}y^{-1}}{8a^2}\\ &= \frac{3}{8a^2xy}\end{aligned}$$

Otra manera de proceder, sin olvidar el fundamento detrás de ello, es "cancelar" las potencias que tienen igual base. De esta manera decimos que "x^2 se cancela con el x^3 del denominador y nos queda sólo una x en el denominador". Así mismo decimos que "y^3 se cancela con el y^4 del denominador y nos queda sólo una y en el denominador". No es el lenguaje matemático correcto pero nos sirve para mecanizar algunos procedimientos y ahorrarnos algunos pasos, sin embargo no debemos olvidar nunca el fundamento detrás de ello ya que al hacerlo estaremos corriendo el riesgo de cometer errores de procedimiento.

2. Reducir $\dfrac{30x^6y^2}{45a^3x^4y^3}$ a la expresión más simple.

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{30x^6y^2}{45a^3x^4y^3} &= \frac{2x^6y^2}{3a^3x^4y^3}\\ &= \frac{2x^2y^2}{3a^3y^3}\\ &= \frac{2x^2}{3a^3y}\end{aligned}$$

Ejercicios 1

Escribe cada fracción algebraica en su forma más simplificada

1. $\dfrac{x^2}{xa^3}$
2. $\dfrac{2a^4}{12a^5}$
3. $\dfrac{15x^3y^5}{25axy}$
4. $\dfrac{18m^2n^4}{34m^3n^4p}$
5. $\dfrac{8^5n^4x^2}{24mn^2x^3}$
6. $\dfrac{21x^6y^5z^4w^3}{63x^4z^3w^2}$

3.2. Simplificación de polinomios

La única manera de suprimir términos entre el numerador y denominador es cuando todos los términos se están multiplicando. Por lo tanto, para simplificar los polinomios en una fracción algebraica debemos descomponerlos en sus factores y, luego de ello, podremos suprimir los factores comunes entre numerador y denominador. Veamos un ejemplo:

Ejemplo

1. *Simplificar la fracción* $\dfrac{ab}{3a^2b-3ab^2}$

Solución: No podemos simplificar la fracción inmediatamente porque en el denominador hay dos términos que se suman, por lo tanto, debemos reescribir el denominador como producto de sus factores comunes.

$$\begin{aligned}\frac{ab}{3a^2b-3ab^2} &= \frac{ab}{3ab(a-b)}\\ &= \frac{1}{3(a-b)}\end{aligned}$$

2. *Reducir a su forma más simple la expresión* $\dfrac{15a^2bn-45a^2bm}{10a^2b^2n-30a^2b^2m}$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{15a^2bn-45a^2bm}{10a^2b^2n-30a^2b^2m} &= \frac{15a^2b(n-3m)}{10a^2b^2(n-3m)}\\ &= \frac{15a^2b}{10a^2b^2}\\ &= \frac{3}{2b}\end{aligned}$$

Recuerda que cuando en el denominador hay una suma de términos no podemos simplificar. Sólo se puede hacer cuando las expresiones están factorizadas.

No podemos olvidar que en algunos casos los polinomios pueden factorizarse como productos notables
Veamos el siguiente caso.

Ejemplo

Simplificar $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{4a^2-4ba}$

Solución: Notar que el numerador es un cuadrado de binomio de $a-b$ y el denominador lo podemos factorizar por $4a$.

$$\begin{aligned}\frac{a^2-2ab+b^2}{4a^2-4ba} &= \frac{(a-b)^2}{4a(a-b)}\\ &= \frac{(a-b)(a-b)}{4a(a-b)}\\ &= \frac{a-b}{4a}\end{aligned}$$

Ejercicios 2

Escribe las fracciones en su forma irreducible.

1. $\dfrac{12ab}{4a^2x+4a^3}$
2. $\dfrac{m^2-2m-3}{m-3}$
3. $\dfrac{10x^2y^3z}{80(x^2-x^2y)}$
4. $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$
5. $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$
6. $\dfrac{m^2+n^2}{m^4-n^2}$
7. $\dfrac{6x^2-6+5x}{15x^2-7x-2}$
8. $\dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$
9. $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+b)^2-c^2}$
10. $\dfrac{8x^4-xy^3}{4x^4-4x^3y+x^2y^2}$
11. $\dfrac{4a^2-(x-3)^2}{(2a+x)^2-9}$
12. $\dfrac{m-am+n-an}{1-3a+3a^2-a^3}$
13. $\dfrac{x^2-x^3-1-x}{x^2+1-x^3-x}$

4. Operación con fracciones algebraicas

Los pasos recomendados para sumar o restar fracciones son los mismos que en la aritmética:

- Simplificar las fracciones en la medida de lo posible.
- Identificar el mínimo común denominador.
- Amplificar las fracciones para que tengan el mismo denominador.
- Efectuar las multiplicaciones.
- Sumar los términos en el numerador y denominador.
- Reducir términos semejantes en el numerador.
- Si es necesario, simplificar nuevamente.

4.1. Adición

Para entender cómo sumar expresiones algebraicas fraccionarias veamos el siguiente ejemplo:

✎ ***Ejemplo***

Simplificar $\dfrac{2}{5a^2} + \dfrac{1}{3ab}$

Solución: Entre $5a^2$ y $3ab$ debemos encontrar el mínimo común denominador. Primero buscamos el MCM entre los coeficientes 3 y 5 que es 15. En segundo lugar vemos entre a^2 y ab cuál es el MCM. Notar que el MCM es el que tiene todos los factores de los dos términos elevados a las **máximas potencias** a las que aparecen. Entonces el MCM será:

$$15a^2b$$

Notar que esta expresión es divisible por $5a^2$ y $3ab$. Como tercer paso debemos ver **¿por cuánto debemos amplificar cada fracción?** para que su denominador sea $15a^2b$.
La primera fracción la debemos amplificar por $3b$, ya que $3b \cdot 5a^2 = 15a^2b$ y la segunda fracción la debemos ampliar por $5a$, ya que $5a \cdot 3ab = 15a^2b$. Entonces el problema queda escrito como:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5a^2} + \frac{1}{3ab} &= \frac{3b}{3b} \times \frac{2}{5a^2} + \frac{5a}{5a} \times \frac{1}{3ab} \\ &= \frac{6b}{15a^2b} + \frac{5a}{15a^2b} \\ &= \frac{6b+5a}{15a^2b} \end{aligned}$$

A veces encontrar el mínimo común denominador es un poco más complejo, para estos casos es recomendable factorizar cada denominador para identificar los factores comunes.

El mínimo común denominador contiene a todos los múltiplos diferentes de los denominadores de cada sumando elevados a las máximas potencias que aparecen.

Veamos otro ejemplo:

✎ ***Ejemplo***

Simplifica la siguiente adición $\dfrac{1}{5x+5}+\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{1}{x^2-1}$

Solución: Factorizamos los denominadores

1 1 1

Entonces el denominador buscado es:

$$10(x-1)(x+1)$$

Ahora amplificamos cada fracción por el factor que nos permite obtener el mínimo común denominador.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{(x+1)(x-1)} &= \frac{2(x-1)}{2(x-1)}\times\frac{1}{5(x+1)}+\frac{5(x+1)}{5(x+1)}\times\frac{1}{2(x-1)}+\frac{10}{10}\times\frac{1}{(x+1)(x-1)}\\
&= \frac{2(x-1)}{10(x+1)(x-1)}+\frac{5(x+1)}{10(x+1)(x-1)}+\frac{10}{10(x+1)(x-1)}\\
&= \frac{2(x-1)+5(x+1)+10}{10(x+1)(x-1)}\\
&= \frac{2x-2+5x+5+10}{10(x+1)(x-1)}\\
&= \frac{7x+13}{10(x+1)(x-1)}\\
&= \frac{7x+13}{10(x^2-1)}
\end{aligned}$$

4.2. Sustracción

Para realizar una sustracción hacemos los mimos pasos descritos en el caso de la adición, pero ahora debemos considerar el signo de resta como el signo de la fracción. Para entender este caso veamos el siguiente ejemplo:

✎ ***Ejemplo***

Simplifica $\dfrac{5}{2a}-\dfrac{a-2}{8a^2}$

Solución: El mínimo común denominador entre $2a$ y $8a^2$ es $8a^2$, ya que al multiplicar $2a$ por $4a$ lo obtenemos. Entonces la nueva sustracción es:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{2a}-\frac{a-2}{8a^2} &= \frac{4a}{4a}\times\frac{5}{2a}-\frac{a-2}{8a^2}\\
&= \frac{4a\cdot 5}{8a^2}-\frac{a-2}{8a^2}
\end{aligned}$$

Ahora que las fracciones tienen igual denominador, restamos los numeradores teniendo especial cuidado con el signo menos.

$$\begin{aligned}\frac{4a\cdot 5}{8a^2}-\frac{a-2}{8a^2} &= \frac{20a-(a-2)}{8a^2}\\ &= \frac{20a-a+2}{8a^2}\\ &= \frac{19a+2}{8a^2}\end{aligned}$$

✍ Ejercicios 3

Simplifica las siguientes expresiones:

1. $\frac{x-2}{8}+\frac{9x+18}{6}$
2. $\frac{4}{a^2b}-\frac{10}{b^2a}$
3. $\frac{1}{4a+4}-\frac{1}{8a-8}$
4. $\frac{1-x}{x-4}+\frac{1}{x-3}$
5. $\frac{m-n}{m+n}-\frac{m+n}{m-n}$
6. $\frac{a}{a^2+ab}+\frac{1}{a+b}$
7. $\frac{a-2ax}{x-a}+\frac{2x-a}{a^2-x^2}$
8. $\frac{n}{m^2}+\frac{6}{mn}+\frac{8}{n}$
9. $\frac{2x-3}{3x}-\frac{3a+2}{10a}$
10. $\frac{x-y}{a}+\frac{x+y}{a^2x}-\frac{1}{x}$
11. $\frac{a-3b}{ab}-\frac{3m-2a}{am}-\frac{1}{b}$
12. $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}+\frac{x+5}{1-x^2}$
13. $\frac{a-1}{a-2}-\frac{a-2}{a+3}-\frac{1}{1-a}$
14. $\frac{1}{ax}-\frac{1}{a^2-ax}+\frac{1}{x}$

De modo general siempre podemos resolver la suma o resta de dos fracciones como:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm cb}{bd}$$

Documento (Adaptación) tomado de internet link para su consulta:
https://cdn.puntajenacional.cl/uploads/guia/855830294080282a43de5760c060109c4f2551d63ef81046faae.pdf