FUNDACIÓN CHAMINADE
Colegio Parroquial
de San Miguel
Departamento de Matemática

"EL SÍ DE LA FAMILIA MARIANISTA"

Actividad de Cierre – Guías 03[a][b]

IV$^{\text{tos}}$ Medios – Funciones y Procesos Infinitos (Artísticos+Opción C)

TEMA: INTRODUCCIÓN A SUCESIONES, PROGRESIONES Y RECURRENCIAS
14 de mayo, 2020

Nombre: ________________________ **Curso:** _____

Esta Actividad de cierre pretende evaluar la comprensión, desarrollo y aprendizaje de los siguientes **Objetivos Fundamentales** y **Contenidos Mínimos** correspondientes al curso *Funciones y Procesos Infinitos*:

OF1. *Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de analizar, confrontar y construir estrategias personales para la resolución de problemas o desafíos que involucren funciones, relaciones entre geometría y progresiones.*
OF2. *Conocer y utilizar conceptos y lenguaje matemático asociados a modelación matemática y procesos infinitos.*

CMO3. Procesos Infinitos
CMO3a. *Planteo de algunos problemas geométricos, de probabilidades o de matemáticas financieras que involucren la noción de sumatoria; introducción del símbolo sumatorio. Propiedades de linealidad, asociatividad y propiedad telescópica. Aplicación de éstas al cálculo de algunas sumas concretas, por ejemplo, de los primeros n números naturales, de sus cuadrados, de los números impares.*
CMO3b. *Progresiones aritméticas y geométricas, suma de sus términos. Aplicación a la resolución de algunos problemas geométricos, de interés compuesto, de decaimiento radioactivo, de poblaciones.*
CMO3c. *Series geométricas y telescópicas. Convergencia intuitiva de sucesiones y series.*
CMO3d. *Iteraciones. Nociones acerca de fractales. Ejemplo de áreas finitas con perímetro infinito.*

Plazo de entrega: Lunes 25 de mayo, hasta las 18:00 hrs.
El formato de entrega es un archivo con extensión **pdf** enviado al correo `profe.jaime.psumat@gmail.com`
El nombre del archivo enviado debe indicar el nombre del alumno y el curso, en el formato `apellido1_apellido2_nombre_curso.pdf`, donde `curso` puede ser `4A` o bien `4B`. Por ejemplo, `Aravena_Garrido_Juan_4A.pdf`
Todas las dudas y consultas serán atendidas en las sesiones virtuales que se realizarán previamente a la entrega del desarrollo de esta actividad.

Para evaluar el desarrollo de la actividad, cada problema será valorado (asignación de puntaje) siguiendo la siguiente **Escala de Validación**:

0 puntos No hay comprensión del problema, ni de los conceptos o estrategias necesarios para su desarrollo. Lo entregado no corresponde a la respuesta solicitada, ni al nivel esperado. Comete demasiados errores conceptuales y de procedimiento. Prácticamente entrega la respuesta en blanco.

1 punto Hay una comprensión superficial del problema. El desarrollo entregado relaciona algunos conceptos o estrategias necesarios para desarrollar la solución, pero no los integra en función de la respuesta esperada. Comete algunos errores, ya sea conceptuales o de procedimiento.

2 puntos Existe una comprensión suficiente del problema y su respuesta. Evidencia manejo de conceptos y estrategias que permitirían finalizar la solución, pese a que no termina adecuadamente. No comete errores conceptuales, quizás algunos procedimentales.

3 puntos Lo entregado permite evidenciar competencias matemáticas esperadas para la resolución del problema. Finaliza satisfactoriamente, o está muy próximo a hacerlo.

Dependiendo del puntaje obtenido, se asignará un **nivel de logro** que permita evaluar el desarrollo del aprendizaje de la Unidad.

Enunciados.

1. [**Comprensión**] El símbolo $\sum$ (sigma mayúscula, letra del alfabeto griego), llamado *sumatoria*, se utiliza para resumir o describir el resultado de una suma de elementos (consecutivos) de una sucesión. Por ejemplo, si $a_1 = 3$, $a_2 = 22$ y $a_3 = -2$, la notación

$$\sum_{k=1}^{3} a_k$$

significa que hay que considerar la suma de los elementos a_k, considerando los valores del (sub)índice k desde 1 hasta 3, ambos inclusive (la sumatoria va desde $k = 1$ inferiormente, hasta $k = 3$ superiormente). Es decir,

$$\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3 = \underbrace{3}_{a_1} + \underbrace{22}_{a_2} + \underbrace{(-2)}_{a_3} = 23\,.$$

Considerando esta notación, calcule el valor de las siguientes sumatorias:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{5} x_k$, donde (x_k) es una PA de inicio $x_1 = 4$ y diferencia 3.

(b) $\sum\limits_{k=4}^{10} a_k$, donde (a_k) es una PA de inicio $a_1 = -1$ y diferencia 5.

(c) $\sum\limits_{k=1}^{6} b_k$, donde (b_k) es una PG de inicio $b_1 = 8$ y razón $\frac{1}{2}$.

2. [**Aplicación**] Considere la sucesión (a_n) definida como $a_n = \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$.

(a) Calcule los primeros 5 elementos de esta sucesión.

(b) Explique por qué $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

(c) Utilizando el resultado anterior, calcule el valor de la siguiente suma (llamada *suma telescópica*):

$$\sum_{n=1}^{99} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{97} + a_{98} + a_{99}\,.$$

3. [**Aplicación**] Se están almacenando postes telefónicos en una pila con 25 postes en la primera capa, 24 en la segunda, y así sucesivamente (figura 1). Si hay 12 capas, ¿cuántos postes telefónicos contiene la pila?

4. [**Aplicación**] Un cuadrado amarillo de lado 1 se divide en nueve cuadrados más pequeños, y el cuadrado de en medio se pinta de azul como se ve en la figura 2. Cada uno de los cuadrados amarillos más pequeños se divide a su vez en nueve cuadrados, y cada uno de los cuadrados de en medio se pinta de azul. Si este proceso se continúa indefinidamente, ¿cuál es el área total que se pinta de azul?

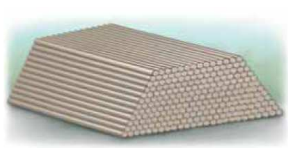

Figura 1

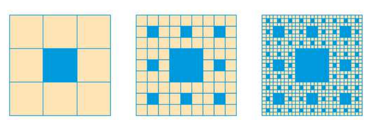

Figura 2

5. [**Análisis**] Encuentre los primeros 40 términos de la sucesión definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & \text{si } a_n \text{ es un número par} \\ 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es un número impar} \end{cases}$$

con $a_1 = 11$. Haga lo mismo si $a_1 = 25$. Establezca una conjetura acerca de este tipo de sucesión. Intente otros varios valores para a_1 para probar su conjetura.