FUNDACIÓN CHAMINADE
Colegio Parroquial
de San Miguel
Departamento de Matemática

"EL SÍ DE LA FAMILIA MARIANISTA"

[Solucionario] Guía de ejercicios 03
IV$^{\text{tos}}$ Medios – Funciones y Procesos Infinitos

TEMA: TÉCNICAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
03 de abril, 2020

Nombre: ____________________ **Curso:** _____

En esta Guía de Ejercicios, se desarrollará el siguiente **Objetivo Fundamental** correspondiente al curso *Funciones y Procesos Infinitos*:

OF1. *Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de analizar, confrontar y construir estrategias personales para la resolución de problemas o desafíos que involucren funciones, relaciones entre geometría y progresiones.*

Coloque esta guía y el desarrollo (corcheteado) en su **portafolio** (carpeta). Recuerde que el portafolio en su conjunto representa una calificación al final del trimestre.

Si desea tener una idea del grado de desempeño en la resolución o desarrollo de la guía, puede utilizar la siguiente escala para asignar un puntaje en cada ejercicio solicitado:

Escala de Evaluación:

0 No logrado, insuficiente. No hay comprensión del problema (ejercicio), ni de los conceptos o estrategias necesarios para su desarrollo. Lo entregado no corresponde a la respuesta solicitada, ni al nivel esperado. Comete demasiados errores conceptuales y de procedimiento. Prácticamente entrega la respuesta en blanco.

1 Básico. Hay una comprensión superficial del problema (ejercicio). El desarrollo entregado relaciona algunos conceptos o estrategias necesarios para desarrollar la solución, pero no los integra en función de la respuesta esperada. Comete algunos errores, ya sea conceptuales o de procedimiento.

2 Medio. Existe una comprensión suficiente del problema (ejercicio) y su respuesta. Evidencia manejo de conceptos y estrategias que permitirían finalizar la solución, pese a que no termina adecuadamente. No comete errores conceptuales, quizás algunos procedimentales.

3 Logrado. Lo entregado permite evidenciar competencias matemáticas esperadas para la resolución del problema o ejercicio. Finaliza satisfactoriamente, o está muy próximo a hacerlo.

SOLUCIONARIO

1. Investigue y explique con sus propias palabras los siguientes conceptos: **sucesión** (secuencia), **progresión aritmética**, **progresión geométrica**, **recurrencia** (sucesión definida por recurrencia). Indique al menos dos ejemplos por cada uno de esos conceptos.

Solución: Una **sucesión** real es una *función* con dominio el conjunto de números naturales, y recorrido el conjunto de números reales. Es decir, una sucesión es $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, de forma que a cada n le corresponde el valor $f(n)$. Habitualmente sólo interesa los valores que f va tomando por cada n. Por eso, se prefiere la notación $f(n) = a_n$, y entonces se escribe la secuencia como (a_n), donde a_n se denomina **término general** de la sucesión.
Una **progresión aritmética** (P.A.) es una sucesión en donde cada elemento a_n (salvo el primero a_1) se puede escribir a partir del anterior, sumando una cantidad fija (que puede ser positiva o negativa). Dicho valor se denomina la *diferencia común* de la P.A. En otras palabras, se cumple que $a_n = a_{n-1} + d$, donde a_{n-1} es el elemento anterior de a_n (el que está un paso atrás). Se puede demostrar que, en este caso, se cumple que el término general se puede escribir en términos de a_1 y d: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$.
Una **progresión geométrica** (P.G.) es similar a una P.A., sólo que en vez de ir sumando una cantidad fija constante entre cada par de elementos consecutivos, vamos multiplicando por una cantidad fija constante (diferente de cero), que se denomina *razón común* de la P.G. Al igual que antes, se puede mostrar que el término general b_n de una P.G. se puede escribir como $\boxed{b_n = b_1 \cdot r^{n-1}}$.
Una **recurrencia** es el caso general de una progresión (aritmética o geométrica): en esta secuencia, cada elemento se construye a partir de uno o más valores anteriores. Una recurrencia famosa es la *sucesión de Fibonacci*, aquella donde $a_1 = a_2 = 1$, y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, todo elemento (salvo los dos primeros), se escriben como suma se los dos anteriores a él. De este modo, la secuencia sería $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots)$. ■

2. Muestre que la sucesión $(1, 4, 7, 10, \cdots, 3n-2, \cdots)$ es una progresión aritmética, y encuentre la **diferencia común**.

Solución: Si denotamos por (a_n) la secuencia anterior, se observa que el valor inicial es 1, y la diferencia común es 3. Con esto, el término general debiera ser $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1) \cdot 3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2$, que corresponde a la fórmula planteada en el problema. ■

3. Si el cuarto término de una progresión aritmética es 5, y el noveno término es 20, determine el sexto término. Justifique.

Solución: Utilizando la fórmula para el término general de una P.A., se tiene que $a_4 = a_1 + 3d = 5$, y $a_9 = a_1 + 8d = 20$, donde a_1 es el primer término de la P.A. y d es la diferencia común. Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene que $d = 3$ y $a_1 = -4$. Con esto, $a_6 = a_1 + 5d = -4 + 15 = 11$. ■

4. Sea (a_n) una progresión aritmética, tal que $a_1 = 5$ y $a_3 = 13$. Determine el valor de a_{10} y de a_{20}.

Solución: Sea (a_n) la P.A. de diferencia común d. Sabemos que $a_3 = a_1 + 2d = 13$, de donde $d = 4$.
Por tanto, $a_{10} = a_1 + 9d = 5 + 36 = 41$ y $a_{20} = a_1 + 19d = 5 + 76 = 81$. ■

5. Dada una progresión aritmética con $a_3 = 4$ y $a_{20} = 22$, encuentre a_{15}. Justifique.

Solución: Hay que plantear el sistema de ecuaciones para calcular a_1 y d, la diferencia común de la P.A.
Tenemos que $a_3 = a_1 + 2d = 4$ y $a_{20} = a_1 + 19d = 22$. Resolviendo el sistema de ecuaciones, se deduce que $d = \frac{18}{17}$.
Este valor es suficiente para resolver el problema, pues $a_{15} = a_1 + 14d = \underbrace{a_1 + 2d}_{a_3} + 12d = 4 + 12 \cdot \frac{18}{17} = \frac{284}{17} = 16\frac{12}{17}$

(no fue necesario determinar el valor de a_1). ■

6. Un hombre desea construir una escalera con 9 escalones que vayan disminuyendo uniformemente desde 24 pulgadas en la base, hasta 18 pulgadas en lo más alto. Determine las longitudes de los siete escalones intermedios.
Puede realizar un dibujo para ayudarse en el razonamiento.

Solución: Definamos (E_n) la P.A. cuyos primeros 9 elementos sean las medidas de los escalones, que sabemos van disminuyendo uniformemente, y sea d la diferencia común.
Tenemos que $E_1 = 24$ y $E_9 = 18$. Además, $E_9 = E_1 + 8d$, de donde se deduce que $d = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4} = -0,75$.
Por tanto, $E_2 = 23,25$; $E_3 = 22,5$; $E_4 = 21,75$; $E_5 = 21$; $E_6 = 20,25$; $E_7 = 19,5$; y finalmente, $E_8 = 18,75$. ■

7. Considere la sucesión (A_n) definida por recurrencia como $A_1 = 3$, $A_n = \frac{A_{n-1}+10}{6}$.

(a) Determine los primeros 10 elementos de esta recurrencia. Es decir, calcule $A_2, A_3, A_4, \cdots, A_{10}$. Puede utilizar calculadora (en formato fracción o decimal con 3 cifras decimales).

(b) ¿Qué ocurre con el valor de A_n a medida que n es más grande? Para ayudarnos a responder esta pregunta, puede utilizar una planilla de cálculo o bien una calculadora científica con tecla `[ANS]`. En tal caso, presione el valor 3 (valor inicial) y la tecla del signo igual `[=]`, y luego, para generar la recurrencia, presione las siguientes teclas en el mismo orden indicado (el "+" es para indicar concatenación de teclas):

`[(]+[ANS]+[+]+[1]+[0]+[)]+[÷]+[6]+[=]`

Si presiona una cantidad suficiente de veces la tecla `[=]`, observará que los valores cada vez se acercan más a un número concreto. ¿Cuál es dicho valor? Decimos que la sucesión es **convergente** cuando tiene la característica de acercarse cada vez más a un valor; y dicho valor se denomina el **límite** de la sucesión.
¿Qué hubiera pasado si $A_1 = 2$? Explique.

(c) Utilizando la misma estrategia anterior, determine si la recurrencia $B_1 = -1$, $B_n = \frac{B_{n-1}+12}{B_{n-1}+5}$ es convergente. Indique el valor del límite. ¿Qué pasaría si el valor inicial cambia? Explique.

Solución:

(a) $A_2 = \frac{A_1+10}{6} = \frac{3+10}{6} = \frac{13}{6}$.
Del mismo modo, $A_3 = \frac{A_2+10}{6} = \frac{\frac{13}{6}+10}{6} = \frac{73}{36}$. Siguiendo con el mismo procedimiento, se tiene que $A_4 = \frac{433}{216}$, $A_5 = \frac{2\,593}{1\,296}$, $A_6 = \frac{15\,553}{7\,776}$, $A_7 = \frac{93\,313}{46\,656}$, $A_8 = \frac{559\,873}{279\,936}$, $A_9 = \frac{3\,359\,233}{1\,679\,616}$ y $A_{10} = \frac{20\,155\,393}{10\,077\,696}$.

(b) El proceso iterativo se aproxima cada vez más al valor 2. De hecho, si $A_1 = 2$, entonces **todos** los demás valores serían iguales a 2, pues $A_2 = \frac{2+10}{6} = 2$ (esto se denomina *punto fijo*).

(c) Realizando la misma estrategia anterior, se obtiene que (B_n) se acerca cada vez más al valor límite 2. No importando el valor inicial que se considere, la recurrencia tiende siempre a acercarse o converger a 2 (que de hecho es un punto fijo para la secuencia); salvo que el valor inicial sea $B_1 = -6$, ya que en tal caso, la sucesión se queda fija en el valor -6. En efecto, si $B_1 = -6$, entonces $B_2 = \frac{-6+12}{-6+5} = \frac{6}{-1} = -6$ (este valor es también un punto fijo para la recurrencia).

■