"EL SÍ DE LA FAMILIA MARIANISTA"

[Solucionario] Guía de ejercicios 03
III$^{\text{ros}}$ Medios – Matemática

TEMA: NÚMEROS COMPLEJOS
03 de abril, 2020

Nombre: ______________________________ **Curso:** _____

En esta Guía de Ejercicios, se desarrollarán los siguientes **Objetivos de Aprendizajes** correspondiente a la Unidad 1:

CyC OA01. *Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.*

Hab OA(b) *Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.*

Hab OA(d) *Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.*

Hab OA(j) *Desarrollar un trabajo colaborativo en línea para discusión y resolución de tareas matemáticas, usando herramientas electrónicas de productividad, entornos virtuales y redes sociales.*

Coloque esta guía y el desarrollo (corcheteado) en su **portafolio** (carpeta). Recuerde que el portafolio en su conjunto representa una calificación al final del trimestre.

Si desea tener una idea del grado de desempeño en la resolución o desarrollo de la guía, puede utilizar la siguiente escala para asignar un puntaje en cada ejercicio solicitado:

Escala de Evaluación:

0 No logrado, insuficiente. No hay comprensión del problema (ejercicio), ni de los conceptos o estrategias necesarios para su desarrollo. Lo entregado no corresponde a la respuesta solicitada, ni al nivel esperado. Comete demasiados errores conceptuales y de procedimiento. Prácticamente entrega la respuesta en blanco.

1 Básico. Hay una comprensión superficial del problema (ejercicio). El desarrollo entregado relaciona algunos conceptos o estrategias necesarios para desarrollar la solución, pero no los integra en función de la respuesta esperada. Comete algunos errores, ya sea conceptuales o de procedimiento.

2 Medio. Existe una comprensión suficiente del problema (ejercicio) y su respuesta. Evidencia manejo de conceptos y estrategias que permitirían finalizar la solución, pese a que no termina adecuadamente. No comete errores conceptuales, quizás algunos procedimentales.

3 Logrado. Lo entregado permite evidenciar competencias matemáticas esperadas para la resolución del problema o ejercicio. Finaliza satisfactoriamente, o está muy próximo a hacerlo.

SOLUCIONARIO

1. Considere la *famila* de funciones cuadráticas definidas por $f(x) = x^2 - 2x + q$, con $q \in \mathbb{R}$ (un número real). En otras palabras, cada función es diferente una de otra, dependiendo del valor que asuma q.

(a) Grafique las funciones f que se obtienen para los siguientes valores de q: -3, -1, 0, 1, 5. Puede utilizar algún recurso informático (programa, página web o aplicación) para facilitar el proceso. En caso que la gráfica (recuerde que se denomina *parábola*) intersecte, o corte, el eje x (el eje horizontal), indique los valores donde ello ocurre (esos puntos se denominan *raíces* de la función, o *solución* de la respectiva *ecuación cuadrática*).

(b) ¿Para qué valor de q la función f deja de tener raíces reales? Es decir, ¿a partir de qué valor de q la parábola ya no corta el eje x?

(c) Considere el caso particular de la función definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Observe el procedimiento siguiente para descubrir si tiene o no raíces reales (este procedimiento se denomina *completación de cuadrado*):

$$\begin{aligned} & & x^2 - 2x + 2 &= 0 \\ &\Rightarrow & x^2 - 2x + \underbrace{2 - 1}_{=1} &= 0 - 1 \\ &\Rightarrow & x^2 - 2x + 1 &= -1 \\ &\Rightarrow & (x-1)^2 &= -1. \end{aligned}$$

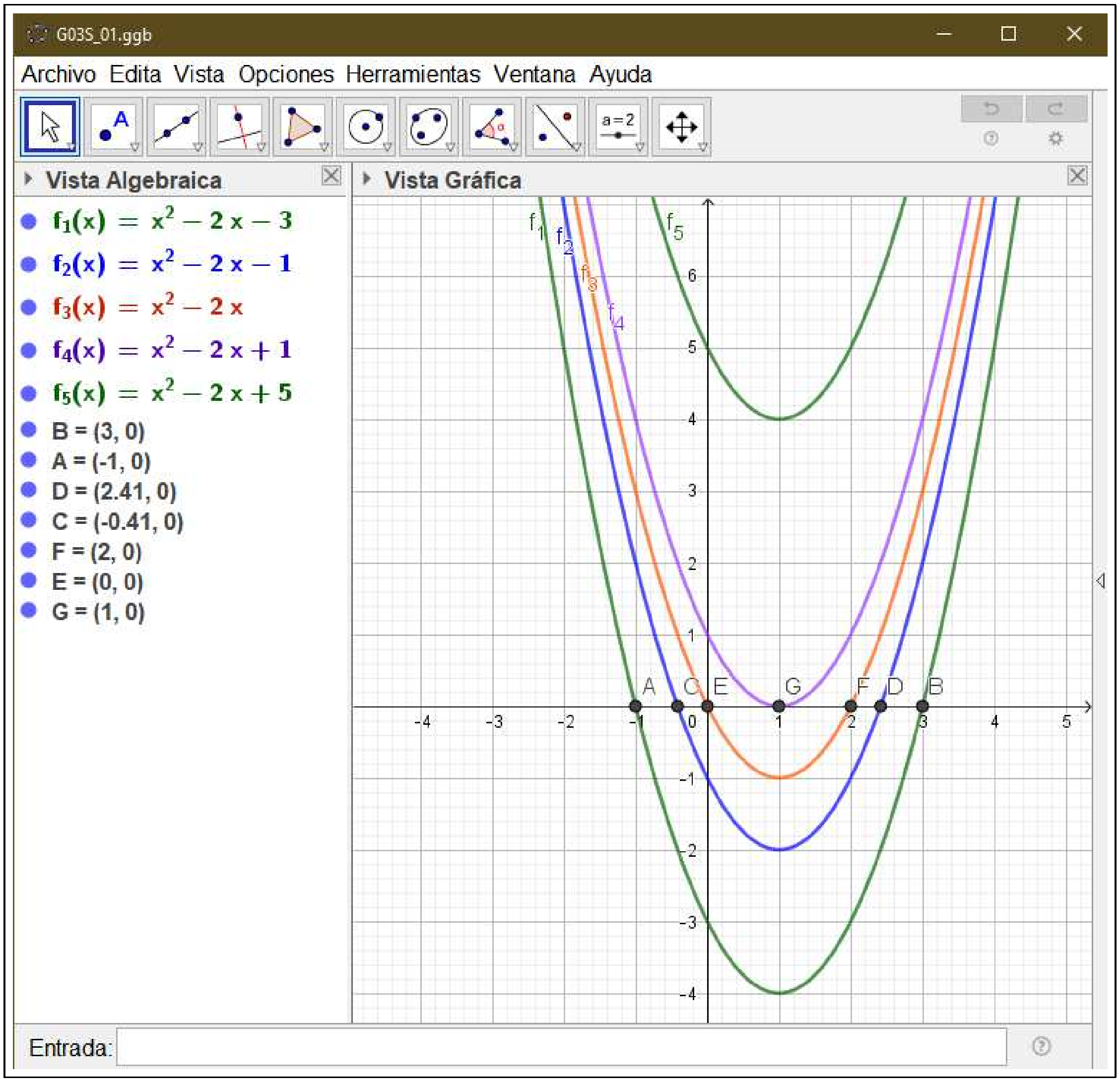
En este punto, es imposible continuar ya que en $\mathbb{R}$ no existe número alguno que al cuadrado resulte igual a un negativo, ya que no existe la raíz cuadrada de un número negativo... ¿y si aceptáramos que se puede continuar? De ser posible, se tendría

$$\begin{aligned} & & (x-1)^2 &= -1 \\ &\Rightarrow & \sqrt{(x-1)^2} &= \sqrt{-1} \\ &\Rightarrow & (x-1) &= \pm\sqrt{-1} \\ &\Rightarrow & 1 + (x-1) &= 1 \pm \sqrt{-1} \\ &\Rightarrow & x &= 1 \pm \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Si llamamos i al objeto $\sqrt{-1}$, entonces resulta que $x = 1 \pm i$.
Este símbolo i se denomina **unidad imaginaria**, y cumple que $i^2 = -1$. La expresión algebraica $a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ (ambos son números reales, y el símbolo i es el que se mencionó antes), se denomina **número complejo**. Es decir, un número complejo es una expresión algebraica compuesta de dos sumandos, donde uno de ellos está acompañando al símbolo i.
Realizando el mismo procedimiento anterior, resuelva la ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Solución:

(a) Para graficar, utilizaremos ©GeoGebra:



En el gráfico se observa cada una de las respectivas parábolas, a la vez que las raíces cuando es pertinente. De hecho,

$$
\begin{array}{ll}
f_1(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) & (\text{raíces } x_1 = -1 \text{ y } x_2 = 3) \\
f_2(x) = x^2 - 2x - 1 = (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2}) & (\text{raíces } x_1 = 1 - \sqrt{2} \text{ y } x_2 = 1 + \sqrt{2}) \\
f_3(x) = x^2 - 2x = x(x-2) & (\text{raíces } x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 2) \\
f_4(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 & (\text{raíz única } x = 1)
\end{array}
$$

La función definida por $f_5(x) = x^2 - 2x + 5$ no tiene raíces reales, pues su *discriminante* es negativo, $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$.

(b) Tal como se observa del gráfico anterior, es de suponer que cuando $q > 1$, la función f definida por $f(x) = x^2 - 2x + q$ dejará de tener raíces reales (su respectiva parábola no intersecta el eje X). Para que esto ocurra, hay que imponer la condición que el discriminante Δ sea negativo:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot q = 4 - 4q < 0 \Rightarrow 4 < 4q$$

de donde, dividiendo en ambos lados de la inecuación por 4, nos queda $1 < q$.

(c) Para resolver la ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$, procederemos como se señala en la Guía, por el método de completación de cuadrado:

$$
\begin{aligned}
& x^2 - 2x + 5 = 0 \\
\Rightarrow \quad & x^2 - 2x = -5 \\
\Rightarrow \quad & \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{\text{cuadrado de binomio}} = -5 + 1 \\
\Rightarrow \quad & (x-1)^2 = -4 \\
\Rightarrow \quad & x - 1 = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \\
\Rightarrow \quad & x = 1 \pm 2i
\end{aligned}
$$

es decir, las dos raíces complejas serían $x_1 = 1 + 2i$, y $x_2 = 1 - 2i$.

■

2. Si $i^2 = -1$, ¿cuál será el valor de $(2i)^2$? ¿Y de $(3i)^2$? ¿Y el valor de $(-i)^2$? Justifique su respuesta.
<u>Solución:</u> Desarrollando algebraicamente, se tiene que

$$
\begin{aligned}
(2i)^2 &= (2i) \cdot (2i) \\
&= 2i \cdot 2i \\
&= 2 \cdot 2 \cdot i \cdot i \\
&= 4 \cdot i^2 \\
&= 4 \cdot (-1) \\
&= -4
\end{aligned}
$$

Del mismo modo, $(3i)^2 = -9$. Finalmente, $(-i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$. ■

3. Copie (o pegue) en su cuaderno el esquema que viene en la página siguiente.
■

4. Resuelva las siguientes operaciones en los números complejos:

(a) $(3 + 2i) + (5 - i) - (-2 + 3i)$
(b) $(4 - 5i) - (3 - 10i)$
(c) $(1 + i) \cdot (1 - i)$
(d) $\overline{(1 - 5i)} + (13 + i)$
(e) $(2 + 3i) \cdot (-2 + i) + \overline{(4 + 6i)}$

<u>Solución:</u>

(a) Desarrollando, teniendo presente que en la suma (y resta) hay que considerar por separado las partes real e imaginaria de cada número complejo, se tiene que

$$
\begin{aligned}
(3 + 2i) + (5 - i) - (-2 + 3i) &= 3 + 2i + 5 - i + 2 - 3i \\
&= (3 + 5 + 2) + (2i - i - 3i) \\
&= 10 + (-2i) \\
&= 10 - 2i
\end{aligned}
$$

Observe como al eliminar paréntesis en la primera línea de cálculo, el signo negativo previo al tercer paréntesis cambia el signo de cada sumando que está dentro.

(b) $1 + 5i$.

(c) En este caso, multiplicaremos teniendo presente que cada número complejo se puede identificar con un binomio algebraico. Es decir, cada elemento del primer paréntesis se multiplicará con cada elemento del segundo paréntesis:

$$\begin{aligned}(1+i)\cdot(1-i) &= (1+i)\cdot(1+(-i))\\ &= \underbrace{1\cdot 1}_{=1} + \underbrace{1\cdot(-i)}_{=-i} + \underbrace{i\cdot 1}_{=i} + \underbrace{i\cdot(-i)}_{=-i^2}\\ &= 1 \underbrace{-i+i}_{=0} - i^2\\ &= 1-(-1)\\ &= 2\end{aligned}$$

(d) La notación $\overline{a+bi}$ corresponde al *conjugado* de $a+bi$, y es geométricamente, el resultado de reflejar el número $a+bi$ (visto como par ordenado en el plano complejo, o plano de Argand) con respecto al eje horizontal (eje real). Por tanto, $\overline{a+bi} = \overline{(a,b)} = (a,-b) = a-bi$. En resumen, para conjugar sólo basta cambiar el signo de la parte imaginaria.
Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{(1-5i)} + (13+i) &= (1+5i) + (13+i)\\ &= 14+6i\end{aligned}$$

(e) Desarrollando,

$$\begin{aligned}(2+3i)\cdot(-2+i) + \overline{(4+6i)} &= 2\cdot(-2) + 2\cdot i + 3i\cdot(-2) + 3i\cdot i + (4-6i)\\ &= -4 + \underbrace{2i-6i}_{=4i} + 3i^2 + 4 - 6i\\ &= -4 - 4i - 3 + 4 - 6i\\ &= -3 - 10i\end{aligned}$$

■

5. Explique geométricamente por qué $\overline{\overline{a+bi}} = a+bi$.
<u>Solución:</u> Como ya se indicó, $\overline{a+bi} = \overline{(a,b)}$ es el resultado de reflejar con respecto al eje horizontal: se mantiene la parte real a, y la parte imaginaria b cambia de signo. Por tanto, $\overline{a+bi} = a-bi$.
Esto quiere decir que si $a+bi$ estaba ubicado en el cuadrante I o II, entonces el número complejo $\overline{a+bi}$ estará ubicado en el cuadrante IV o III, respectivamente.
Si al número complejo $\overline{a+bi}$ le aplicamos una reflexión con respecto al eje real, es evidente que regresaramos al punto inicial (el reflejo del reflejo es el punto de inicio). Eso quiere decir que $\overline{\overline{a+bi}} = a+bi$.
A modo de ejemplo, si $z = 3+4i$, entonces $\overline{z} = \overline{3+4i} = 3-4i$. Por tanto, $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{3+4i}} = \overline{3-4i} = 3+4i = z$. ■

6. Determine el valor de i^{2020}. Establezca una conjetura (algebraica y geométrica) acerca de las potencias de i.
<u>Solución:</u> Tal como se indica en el esquema que aparece al final de la Guía 03, las potencias enteras de i siguen un patrón o regularidad de orden 4. Esto quiere decir que luego de 4 potencias, el siguiente valor corresponde al valor inicial. En efecto:

$$\begin{array}{llll} i^0 = 1 & i^1 = i & i^2 = -1 & i^3 = i^2\cdot i = -i\\ i^4 = i^2\cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1 & i^5 = i^4\cdot i = i & i^6 = i^5\cdot i = i\cdot i = -1 & i^7 = -i\\ i^8 = 1 & i^9 = i & i^{10} = -1 & i^{11} = -i\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

y así sucesivamente. En general, para saber quién es i^n, lo que debemos hacer es dividir n por 4, y observar el *resto* que esta división genera. De hecho, si $n = 4k + r$, donde r es el resto de la división ($r = 0, 1, 2, 3$), entonces

$$\begin{aligned} i^n &= i^{4k+r} \\ &= i^{4k} \cdot i^r \\ &= (i^4)^k \cdot i^r \\ &= 1^k \cdot i^r \\ &= i^r \end{aligned}$$

asumiendo que las típicas propiedades de potencias para expresiones algebraicas se cumplen también con el símbolo i.

Finalmente, como al dividir 2020 por 4 da resto cero, pues es múltiplo de 4, se tendrá que $i^{2020} = 1$. ■

Referencia: Texto del Estudiante, 3°–4° Medio (SM), páginas 83 a 97.