**FUNDACIÓN CHAMINADE**
**Colegio Parroquial**
**de San Miguel**
Departamento de Matemática

*"EL SÍ DE LA FAMILIA MARIANISTA"*

# [Solucionario] Guía de ejercicios 03
## I$^{\text{ros}}$ Medios – Matemática

Tema: Números Racionales
03 de abril, 2020

**Nombre:** ______________________________ **Curso:** _____

En esta Guía de Ejercicios, se desarrollarán los siguientes **Objetivos de Aprendizajes** correspondiente a la Unidad 1 (Eje Temático **Números**):

**ETem OA01.** *Calcular operaciones con números racionales en forma simbólica.*

**Hab OA(a)** *Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes:*

- *Simplificar el problema y estimar el resultado.*
- *Descomponer el problema en subproblemas más sencillos.*
- *Buscar patrones.*
- *Usar herramientas computacionales.*

**Hab OA(c)** *Utilizar lenguaje matemático para identificar sus propias ideas o respuestas.*

**Hab OA(d)** *Describir relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.*

**Hab OA(o)** *Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.*

Coloque esta guía y el desarrollo (corcheteado) en su **portafolio** (carpeta). Recuerde que el portafolio en su conjunto representa una calificación al final del trimestre.

Si desea tener una idea del grado de desempeño en la resolución o desarrollo de la guía, puede utilizar la siguiente escala para asignar un puntaje en cada ejercicio solicitado:

### Escala de Evaluación:

**0 No logrado, insuficiente.** No hay comprensión del problema (ejercicio), ni de los conceptos o estrategias necesarios para su desarrollo. Lo entregado no corresponde a la respuesta solicitada, ni al nivel esperado. Comete demasiados errores conceptuales y de procedimiento. Prácticamente entrega la respuesta en blanco.

**1 Básico.** Hay una comprensión superficial del problema (ejercicio). El desarrollo entregado relaciona algunos conceptos o estrategias necesarios para desarrollar la solución, pero no los integra en función de la respuesta esperada. Comete algunos errores, ya sea conceptuales o de procedimiento.

**2 Medio.** Existe una comprensión suficiente del problema (ejercicio) y su respuesta. Evidencia manejo de conceptos y estrategias que permitirían finalizar la solución, pese a que no termina adecuadamente. No comete errores conceptuales, quizás algunos procedimentales.

**3 Logrado.** Lo entregado permite evidenciar competencias matemáticas esperadas para la resolución del problema o ejercicio. Finaliza satisfactoriamente, o está muy próximo a hacerlo.

# SOLUCIONARIO

**1.** Investigue sobre el concepto de **Número Racional**: definición, operatoria, y propiedades. ¿Cuándo una fracción se dice irreducible (irreductible)? ¿Qué condición debe cumplir un número escrito en desarrollo decimal para poder transformarlo en fracción (racional)?
Establezca la relación que existe entre los conjuntos $\mathbb{N}$ (números naturales), $\mathbb{Z}$ (enteros) y $\mathbb{Q}$ (racionales).

**Solución:** Un **número racional** es toda cantidad (numérica) que puede ser expresada como fracción $\frac{a}{b}$, con $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$ (recordemos que $\mathbb{Z}$ representa el conjunto de números enteros, y $\mathbb{N}$ representa el conjunto de números naturales, que no considera el cero).
Se puede demostrar que todo número (escrito en expresión decimal) que posea una cantidad finita de decimales, o una cantidad infinita pero periódica de decimales puede ser escrita en forma de fracción (racional). Por tanto, en resumen, los números racionales son el conjunto de todas las fracciones con numerador entero y denominador natural (en esta definición, el signo de la fracción se lo estamos asignando al numerador). Este conjunto se denota con el símbolo $\mathbb{Q}$.
Por tanto, estos números cumplen todas las propiedades y operatorias que ya se han estudiado en las fracciones. Es decir, existen las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), conmutatividad en la suma y producto, y orden (positivos y negativos, mayor y menor).
Una fracción se dice **irreducible** si el numerador y el denominador no tienen factores comunes (la fracción no se puede simplificar más). La fracción $\frac{4}{18}$ no es irreducible, pues el 4 y el 18 tiene como factor común el 2: $\frac{4}{18} \frac{:2}{:2} = \frac{2}{9}$, y esta última fracción sí es irreducible.
Finalmente, se cumple que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. ■

**2.** Resuelva las siguientes operaciones con números racionales. Tenga presente la prioridad de las operaciones:

(a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8} - \dfrac{3}{4}$

(b) $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{7} - \dfrac{5}{14}$

(c) $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{5}\right)$

(d) $\dfrac{3}{5} : \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{8} \cdot 4$

(e) $2\,\dfrac{2}{5} - \dfrac{5}{7} : \dfrac{15}{14}$

**Solución:**

(a) Teniendo en cuenta el denominador común, resulta $\dfrac{1}{8}$.

(b) $\dfrac{1}{14}$.

(c) Resolviendo cada paréntesis, y luego multiplicando los resultados (observar que se cancelan o simplifican muchos elementos), resulta $\dfrac{1}{5}$.

(d) $\dfrac{7}{2} = 3\,\dfrac{1}{2}$, tres enteros y un medio.

(e) $\dfrac{26}{15} = 1\,\dfrac{11}{15}$.

■

**3.** Una calculadora posee dos teclas especiales, que designaremos por **P** y **Q**. Las acciones que realizan estas teclas con el número que se encuentra en la pantalla, son las siguientes:
**P:** el número 1 (uno) se divide por el que está en la pantalla.
**Q:** al número 1 (uno) se le resta el número en pantalla.
Por ejemplo, si en la pantalla estaba el número 5, al presionar la tecla **P** se obtendrá el número $\frac{1}{5}$, y al presionar la tecla $Q$, resultará $\frac{4}{5}$, pues $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.
Sofía coloca en la pantalla el número 3, y luego presiona las teclas **P** y **Q** en el siguiente orden: **PQPQPQ**. ¿Qué número resultará al finalizar el proceso?

**<u>Solución:</u>** Para resolver este problema, hay que ser ordenado en las operaciones y en el proceso.
Veamos, comenzando con el valor en pantalla 3,

$$
\begin{aligned}
3 &\xrightarrow{\textbf{[P]}} \frac{1}{3}\\
\frac{1}{3} &\xrightarrow{\textbf{Q}} 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\\
\frac{2}{3} &\xrightarrow{\textbf{[P]}} \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\\
\frac{3}{2} &\xrightarrow{\textbf{[Q]}} 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\\
-\frac{1}{2} &\xrightarrow{\textbf{[P]}} \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2
\end{aligned}
$$

Finalmente, $-2 \xrightarrow{\textbf{Q}} 1 - (-2) = 3$. ■

**4.** En una comunidad rural del sur de Chile, un barril con 200 litros de gasolina cuesta \$ 640 000. Por otro lado, en una ciudad del norte de Chile, el litro de bencina cuesta $\frac{1}{4}$ del valor en la zona rural. Con estas condiciones, indique el valor de 100 litros de bencina en la ciudad del norte.

**<u>Solución:</u>** Primero, calculemos el valor (precio) de un litro de gasolina en la comunidad rural del sur de Chile. Para ello, debemos calcular $\frac{640\,000}{200}$, que es igual a \$ 3 200. Ahora, con este valor, calculemos el precio del litro de bencina en la ciudad del norte. Como nos dicen que el valor es la cuarta parte, calculamos $\frac{1}{4} \cdot 3\,200$, que nos da \$ 800. Finalmente, 100 litros a este valor, nos dará un total de \$ 80 000. ■

**5.** Considere la siguiente **metáfora** para comprender el concepto de suma de fracciones:

> *"Un niño recibe de su padre un dulce cada tres días. A su vez, su madre le regala un dulce cada dos días. ¿Cuántos dulces ha recibido luego de 12 días, si ambos padres comienzan a regalar dulces simultáneamente?"*
>
> La fracción $\frac{1}{3}$ representa el dulce que el padre da cada 3 días (uno es a tres); del mismo modo, la fracción $\frac{1}{2}$ representa el dulce que la madre da cada 2 días (uno es a dos). Entonces, en conjunto, darán
>
> $$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6},$$
>
> que representa cinco dulces cada seis días. Como $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$, podemos señalar que el niño ha recibido, luego de 12 días, 10 dulces.

Utilizando metáforas similares, desarrolle cada una de las siguientes operaciones:

(a) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5}$

(b) $\dfrac{6}{7} - \dfrac{1}{2}$

**<u>Solución:</u>** Hay que entender que existen muchas respuestas, diferentes, para este problema (cambiando la metáfora, si bien la operatoria da el mismo resultado). A continuación se mostrará alguna de ellas.

(a) Cada 3 días, mi papá me regala 2 sobres para mi álbum, mientras que mi mamá me regala 3 sobres cada 5 días. Como $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{19}{15}$, puedo decir que luego de 15 días he reunido 19 sobres.

(b) Cada 7 días, mi mamá me regala 6 dulces. Pero cada 2 días, le regalo un dulce a mi hermanita (lo pierdo, por eso la resta). Como $\frac{6}{7} - \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$, puedo deducir que luego de 14 días, me quedan 5 dulces.

$\blacksquare$

**6.** Considere la siguiente **situación metafórica**: "Mi papá me regala 4 dulces cada 8 días, mientras que mi mamá me regala 3 dulces cada 6 días." ¿Cuántos días deben transcurrir para que hayamos recibido un total de 50 dulces? Analice y discuta.

**Solución:** Inicialmente, se tiene que $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, al igual que $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Por otro lado, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
Con esto, podríamos decir que después de 50 días tendríamos 50 dulces.
El problema es que puede ocurrir que los dulces se entregan una vez que hayan transcurridos los días indicados; es decir, exactamente después de 8 días recibimos 4 dulces de parte del papá, no antes (lo mismo con los dulces entregados por la mamá).
Observemos que 50 no es múltiplo de 8 ni de 6, y el último múltiplo común de 8 y 6 es 48. Esto nos dice que luego de 48 días, he recibido $\frac{48}{8} \cdot 4 = 24$ dulces de parte del papá, y $\frac{48}{6} \cdot 3 = 24$ dulces de parte de la mamá; en total, 48 dulces. Si dejamos pasar seis días más, recibiré de parte de la mamá 3 dulces más, lo que nos daría un total de 51 dulces.
Por tanto, después de $48 + 6 = 54$ días habremos recibido un total de 51 dulces. $\blacksquare$

**Referencia:** Texto del Estudiante, 1° Medio (Santillana), páginas 16 a 25.