FUNDACIÓN CHAMINADE
Colegio Parroquial
de San Miguel
Departamento de Matemática

"EL SÍ DE LA FAMILIA MARIANISTA"

UNIDAD 1 - Guía de ejercicios 03 III$^{\text{ros}}$ MEDIOS AB

Tema: Números Complejos

03 de abril, 2020

Nombre: ______________________________ **Curso:** _____

En esta Guía de Ejercicios, se desarrollarán los siguientes **Objetivos de Aprendizajes** correspondiente a la Unidad 1:

CyC OA01. *Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.*

Hab OA(b) *Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.*

Hab OA(d) *Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.*

Hab OA(j) *Desarrollar un trabajo colaborativo en línea para discusión y resolución de tareas matemáticas, usando herramientas electrónicas de productividad, entornos virtuales y redes sociales.*

Coloque esta guía y el desarrollo (corcheteado) en su **portafolio** (carpeta). Recuerde que el portafolio en su conjunto representa una calificación al final del trimestre.

Ejercicios y problemas.

1. Considere la *famila* de funciones cuadráticas definidas por $f(x) = x^2 - 2x + q$, con $q \in \mathbb{R}$ (un número real). En otras palabras, cada función es diferente una de otra, dependiendo del valor que asuma q.

(a) Grafique las funciones f que se obtienen para los siguientes valores de q: -3, -1, 0, 1, 5. Puede utilizar algún recurso informático (programa, página web o aplicación) para facilitar el proceso. En caso que la gráfica (recuerde que se denomina *parábola*) intersecte, o corte, el eje x (el eje horizontal), indique los valores donde ello ocurre (esos puntos se denominan *raíces* de la función, o *solución* de la respectiva *ecuación cuadrática*).

(b) ¿Para qué valor de q la función f deja de tener raíces reales? Es decir, ¿a partir de qué valor de q la parábola ya no corta el eje x?

(c) Considere el caso particular de la función definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Observe el procedimiento siguiente para descubrir si tiene o no raíces reales (este procedimiento se denomina *completación de cuadrado*):

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - 2x + \underbrace{2 - 1}_{1} &= 0 - 1 \\ \Rightarrow x^2 - 2x + 1 &= -1 \\ \Rightarrow (x-1)^2 &= -1. \end{aligned}$$

En este punto, es imposible continuar ya que en $\mathbb{R}$ no existe número alguno que al cuadrado resulte igual a un negativo, ya que no existe la raíz cuadrada dé un número negativo... ¿y si aceptáramos que se puede continuar? De ser posible, se tendría

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= -1 \\ \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} &= \sqrt{-1} \\ \Rightarrow (x-1) &= \pm\sqrt{-1} \\ \Rightarrow 1 + (x-1) &= 1 \pm \sqrt{-1} \\ \Rightarrow x &= 1 \pm \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Si llamamos i al objeto $\sqrt{-1}$, entonces resulta que $x = 1 \pm i$.
Este símbolo i se denomina **unidad imaginaria**, y cumple que $i^2 = -1$. La expresión algebraica $a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ (ambos son números reales, y el símbolo i es el que se mencionó antes), se denomina **número complejo**. Es decir, un número complejo es una expresión algebraica compuesta de dos sumandos, donde uno de ellos está acompañando al símbolo i.
Realizando el mismo procedimiento anterior, resuelva la ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$.

2. Si $i^2 = -1$, ¿cuál será el valor de $(2i)^2$? ¿Y de $(3i)^2$? ¿Y el valor de $(-i)^2$? Justifique su respuesta.

3. Copie (o pegue) en su cuaderno el esquema que viene en la página siguiente.

4. Resuelva las siguientes operaciones en los números complejos:

(a) $(3 + 2i) + (5 - i) - (-2 + 31)$
(b) $(4 - 5i) - (3 - 10i)$
(c) $(1 + i) \cdot (1 - i)$
(d) $\overline{(1 - 5i)} + (13 + i)$
(e) $(2 + 3i) \cdot (-2 + i) + \overline{(4 + 6i)}$

5. Explique geométricamente por qué $\overline{\overline{a + bi}} = a + bi$.

6. Determine el valor de i^{2020}. Establezca una conjetura (algebraica y geométrica) acerca de las potencias de i.

Referencia: Texto del Estudiante, 3°-4° Medio (SM), páginas 83 a 97.

NÚMEROS COMPLEJOS $\mathbb{C}$

Definición

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$z = a + ib = (a,b)$

- Parte real $a = Re(z)$
- Parte imaginaria $b = Im(z)$

$\}$ Números Reales

- Símbolo i (unidad) $\rightarrow \boxed{i^2 = -1} \leftrightarrow \boxed{i = \sqrt{-1}}$

RAÍCES DE NÚMEROS NEGATIVOS:

$\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6i$

$\sqrt{-8} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{-1} = 2i\sqrt{2}$

Geometría Plano Argand

- Parte Real en EJE X
- Parte imaginaria en EJE Y

- Módulo: $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = r$ (largo) (Pitágoras)
- Argumento: $Arg(z) = \theta$ (ángulo)

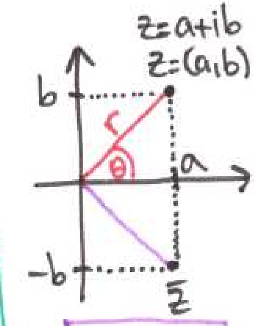
$\}$ $(a,b) = (r,\theta)_p$ Notación Polar

- Conjugado: $\bar{z} = a - ib$ (reflejo)

$\boxed{\bar{\bar{z}} = z}$

$\boxed{|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}}$

$\boxed{Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}}$



$\boxed{|\bar{z}| = |z|}$

OPERATORIA

- Suma/Resta: $(5+3i)+(2+7i) = 7+10i$
- Multiplicación: "Todos con todos, recordando que $i^2 = -1$"

$(5+3i)(2+7i) = 10+35i+6i+21i^2$
$= 10-21+41i$
$= -11+41i$

- División: Como FRACCIÓN, amplificar por el conjugado del denominador. $\}$ ¡¡CUIDADO!!
- En POLARES: Multiplicar/Dividir $\Leftrightarrow$ 1) Multiplicar/Dividir Módulos. 2) Sumar/Restar ángulos.

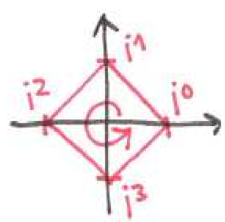
$\boxed{z^2 = (r^2, 2\theta)_p}$

$z = (\sqrt{3},1)$
$= (2,30°)_p$

$z^2 = (2,2\sqrt{3})$
$= (4,60°)_p$

POTENCIAS de i

Ciclo de 4



$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$