FUNDACIÓN CHAMINADE
Colegio Parroquial
de San Miguel
Departamento de Matemática

"EL SÍ DE LA FAMILIA MARIANISTA"

Guía de ejercicios 02 IV$^{\text{to}}$ MEDIO ELECTIVO Opción C

Tema: Técnicas para resolución de problemas

31 de marzo, 2020

Nombre: ______________________________ **Curso:** _____

En esta Guía de Ejercicios, se desarrollará el siguiente **Objetivo Fundamental** correspondiente al curso *Funciones y Procesos Infinitos*:

OF1. *Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de analizar, confrontar y construir estrategias personales para la resolución de problemas o desafíos que involucren funciones, relaciones entre geometría y progresiones.*

Coloque esta guía y el desarrollo (corcheteado) en su **portafolio** (carpeta). Recuerde que el portafolio en su conjunto representa una calificación al final del trimestre.

Si desea tener una idea del grado de desempeño en la resolución o desarrollo de la guía, puede utilizar la siguiente escala para asignar un puntaje en cada ejercicio solicitado:

Escala de Evaluación:

0 No logrado, insuficiente. No hay comprensión del problema (ejercicio), ni de los conceptos o estrategias necesarios para su desarrollo. Lo entregado no corresponde a la respuesta solicitada, ni al nivel esperado. Comete demasiados errores conceptuales y de procedimiento. Prácticamente entrega la respuesta en blanco.

1 Básico. Hay una comprensión superficial del problema (ejercicio). El desarrollo entregado relaciona algunos conceptos o estrategias necesarios para desarrollar la solución, pero no los integra en función de la respuesta esperada. Comete algunos errores, ya sea conceptuales o de procedimiento.

2 Medio. Existe una comprensión suficiente del problema (ejercicio) y su respuesta. Evidencia manejo de conceptos y estrategias que permitirían finalizar la solución, pese a que no termina adecuadamente. No comete errores conceptuales, quizás algunos procedimentales.

3 Logrado. Lo entregado permite evidenciar competencias matemáticas esperadas para la resolución del problema o ejercicio. Finaliza satisfactoriamente, o está muy próximo a hacerlo.

SOLUCIONARIO

1. En un sitio de internet, se puede leer la siguiente información, referida a las *abejas*:
"**Sistema reproductor.** En la reina está compuesto por los ovarios, oviductos laterales, oviducto medio, espermateca, válvula vaginal y vagina. En el zángano está compuesto por: testículos, vesículas seminales, glándulas mucosas, conducto eyaculador y pene (endofalo). En la abeja obrera los ovarios se encuentran atrofiados.
La reina puede determinar el sexo de su descendencia. Cuando un huevo pasa del ovario al oviducto, puede ser fecundado o no con el esperma que contiene la espermateca. El huevo fecundado se transforma en una abeja hembra, ya sea obrera o reina, y el huevo no fecundado en una abeja macho (zángano.) [...]"

Por tanto, se puede decir que una abeja hembra tiene padre y madre; en cambio, una abeja macho solo tiene madre. A partir de esto, ¿cuántos antecesores tiene un zángano (abeja macho) en la vigésima generación anterior a él?

Solución: Si realizamos una tabla con la cantidad de antepasados, por generación, que tiene un zángano inicial, llegamos a lo siguiente (M significa madre o abeja hembra, y Z significa zángano, padre o abeja macho):

Gen	Zángano inicial	Total
1°	M	1
2°	M-Z	2
3°	(M-Z)-M	3
4°	(M-Z)-M-(M-Z)	5
5°	(M-Z)-M-(M-Z)-(M-Z)-M	8
6°		13
7°		21
8°		34
9°		55
10°		89
11°		144
12°		233
13°		377
14°		610
15°		987
16°		1597
17°		2584
18°		4181
19°		6765
20°		**10946**

Luego de 5 iteraciones o repeticiones de la secuencia, se observa que cada número total de antepasados en una generación en particular, se obtiene sumando la cantidad de antepasados que habían en los dos niveles previos a él. Esto recuerda a una famosa sucesión de recurrencia denominada *sucesión de Fibonacci*.
Finalmente, en la vigésima generación anterior al zángano inicial habían 10 946 antepasados (entre abejas y zánganos). ■

2. Una pila de leños tiene 24 leños en la primera capa, 23 en la segunda, 22 en la tercera, y así sucesivamente hasta que la última capa contiene 10 leños. Encuentre el número total de leños en la pila.

Solución: Para calcular el número total de leños que hay en la pila, debemos realizar la siguiente suma:

$$24 + 23 + 22 + \cdots + 12 + 11 + 10.$$

Sea X dicho número. Entonces, se tiene lo siguiente:

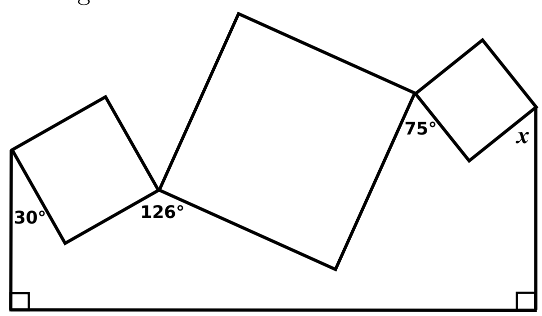
$$\begin{aligned} X &= 24 + 23 + 22 + \cdots + 12 + 11 + 10 \\ X &= 10 + 11 + 12 + \cdots + 22 + 23 + 24 \\ \Rightarrow 2X &= \underbrace{34 + 34 + 34 + \cdots + 34 + 34 + 34}_{15 \text{ veces}} \\ &= 34 \times 15 \end{aligned}$$

es decir, $2X = 34 \times 15$, por tanto $X = \frac{34\times15}{2} = 17 \times 15 = 255$.
En la pila hay un total de 255 leños. ■

3. Justificar el siguiente acertijo: Se toma un número A de tres dígitos (por ejemplo 927), se lo multiplica por 143 (por ejemplo, $927 \cdot 143 = 132561$). Luego, si se multiplican por 7 las tres últimas cifras del número así obtenido, resulta un número cuyas tres últimas cifras coinciden con A (por ejemplo $561 \cdot 7 = 3927$).

Solución: Consideremos $N = \underline{abc} = 100a + 10b + c$ un número de tres cifras, con $a, b, c \in \{0, 1, 2, \cdots, 8, 9\}$, $a \neq 0$. Al multiplicar por 143 el número N, se obtiene otro número, digamos $M = \underline{def\,ghi}$ (es muy probable que M tenga seis cifras, aunque sólo nos interesa que tenga al menos tres cifras, lo que es evidente). Luego nos dicen que debemos multiplicar por 7 los últimos tres dígitos de M. En este sentido, no hay ningún inconveniente en multiplicar todo M por 7. Observemos que $M \times 7 = (N \times 143) \times 7 = N \times 1\,001$, pues $143 \times 7 = 1\,001$. Con esto, podemos decir que al multiplicar por 7 el número M, resulta el número N repetido dos veces. En otras palabras, $7 \times M = \underline{abc\,abc}$. ■

4. Tres cuadrados son colocados, unidos por sus vértices, entre dos segmentos verticales, como se muestra en la figura siguiente. Determine la medida del ángulo x.



Solución: Utilizando el hecho que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $180° \times (n-2)$, y teniendo presente que el polígono en el cual x es ángulo interior tiene 9 lados, se debe cumplir que la suma es $180° \times 7 = 1\,260°$. Por tanto,

$$30° + 90° + 90° + x + 270° + 75° + 270° + 126° + 270° = 1\,260°.$$

Resolviendo para x se obtiene que $x = 39°$. ■

5. De los números 712, 548, 1026, 1456 y 1680, ¿cuál es el único que puede ser escrito como producto de cuatro números naturales consecutivos?

Solución: En toda colección de cuatro números naturales consecutivos siempre habrá un múltiplo de 4, y *al menos* un múltiplo de 3. Por tanto, de los números listados anteriormente, hay que descartar aquellos que no sean múltiplos de 4 (para ser múltiplo de 4 los últimos dos dígitos deben ser divisibles por 4), ni múltiplos de 3 (para ser múltiplo de 3, la suma de todos los dígitos debe ser múltiplo de 3). Con esto, descartamos el 712 (no es múltiplo de 3), el 548 (no es múltiplo de 3), el 1026 (no es múltiplo de 4) y el 1456 (no es múltiplo de 3). De hecho, $1680 = 5 \times 6 \times 7 \times 8$. ■

6. Los números enteros positivos del 1 al 1 000 se escriben uno al lado del otro, en orden creciente, formando el número

$$X = 123456789101112\cdots9991000.$$

En este número X, ¿cuántas veces aparece el número "89"?

Solución: Contemos las apariciones del número 89:

- Del 1 al 10, aparece una vez,
- del 11 al 100, aparece dos veces, $\cdots888990\cdots$ y $\cdots9899\cdots$,
- del 101 al 1000, aparece 10 veces, en la serie del ochocientos noventa $\cdots890891892\cdots$. También aparece 10 veces en la serie del novecientos, $\cdots907908909\cdots$, $\cdots917918919\cdots$. Finalmente, aparece 9 veces más en cada centena, $\cdots189190\cdots$, $\cdots289290\cdots$.

En total, 32 veces. ■

7. En la isla Camaleón hay 13 camaleones de color amarillo, 15 de color verde y 17 de color rojo. Si se encuentran dos camaleones de diferente color, cambian ambos simultáneamente al tercer color (por ejemplo si se encuentran uno amarillo y otro verde, ambos se vuelven rojos). ¿Es posible que en algún momento todos los camaleones lleguen a ser del mismo color?

Solución: Describamos un *estado* del sistema camaleónico mediante una terna ordenada, digamos (a, v, r), donde a indica la cantidad de camaleones amarillos, v los verdes y r los camaleones rojos. Dado que sólo hay cambios de color, pero no en cantidad total de camaleones, siempre se tendrá que $a + v + r = 45$, siendo inicialmente $a = 13$, $v = 15$ y $r = 17$. Analicemos los diferentes casos según se encuentren camaleones de distinto color.

- Caso 1: si se encuentran uno amarillo y uno verde, entonces el sistema cambiará a $(a - 1, v - 1, r + 2)$, ya que ambos se transforman en rojo.
- Caso 2: si se encuentra uno amarillo con uno rojo, el sistema será ahora $(a - 1, v + 2, r - 1)$, ya que ambos cambian a verde.
- Caso 3: finalmente, si se encuentra uno verde y uno rojo, el nuevo sistema quedará descrito por el trío ordenado $(a + 2, v - 1, r - 1)$, pues cada uno cambiará a amarillo.

Veamos el comportamiento de la diferencia en la cantidad de camaleones de cada color. Sea Δ_{pq} la diferencia entre los camaleones de color p y color q. Entonces, para cada caso anterior, se tendrá:

- Caso 1: $\Delta_{AV} = (a-1)-(v-1) = a-v$, $\Delta_{AR} = (a-1)-(r+2) = a-r-3$, $\Delta_{VR} = (v-1)-(r+2) = v-r-3$.
- Caso 2: $\Delta_{AV} = (a-1)-(v+2) = a-v-3$, $\Delta_{AR} = (a-1)-(r-1) = a-r$, $\Delta_{VR} = (v+2)-(r-1) = v-r+3$.
- Caso 3: $\Delta_{AV} = (a+2)-(v-1) = a-v+3$, $\Delta_{AR} = (a+2)-(r-1) = a-r+3$, $\Delta_{VR} = (v-1)-(r-1) = v-r$.

Se observa que la diferencia se mantiene igual, o disminuye 3 o aumenta 3. Entonces, para que todos los camaleones terminen quedando con el mismo color, hay que ver si inicialmente las diferencias pueden llegar a 0, cambiando de 3 en 3. Pero se tiene que inicialmente $\Delta_{AV} = -2$, $\Delta_{AR} = -4$ y $\Delta_{VR} = -2$. Ninguno de esos números llegará a 0 contando de 3 en 3; por tanto, es imposible que bajo esta particularidad todos los camaleones lleguen a ser de un mismo color. ■

8. Se colocan doscientos soldados (todos ellos de diferente estatura) en formación de 20 columnas y 10 filas. Consideremos el soldado más alto de cada una de las 20 columnas; de esta manera tenemos 20 soldados. Llamemos X al más bajo de todos ellos. Ahora, tomando el más bajo de cada una de las 10 filas, llamemos Y al más alto de los diez. ¿Cuál es más alto X, ó Y?

Solución: Se tiene que X es el más bajo de entre todos los soldados más altos contándolos por columnas. A su vez, Y es el más alto de los soldados más bajos cuando se cuentan por filas. Entonces, se cumple que X es más alto que Y. En efecto, supongamos que X proviene de la columna a, y que Y proviene de la fila b. Entonces X es el más alto de entre todos los que están en su misma columna, en particular es más alto que el soldado de la columna a y de la fila b, digamos que ese soldado se llama S. A su vez, como Y es el más bajo de toda su fila, se tiene que Y es más bajo que S, pues está en su misma fila. Por tanto, se cumple que $X \geq S \geq Y$. ■

9. Se tiene un **código** de 3 dígitos, y se conoce lo siguiente:

- en el intento **682**, un número es correcto, en su correspondiente lugar,
- en el intento **614**, un número es correcto, en un lugar equivocado,
- **206** tiene dos números correctos en lugares equivocados,
- en el intento **738**, nada es correcto, y por último
- el número **780** tiene un número correcto en lugar equivocado.

Con esta información, determine una solución al código.

Solución: Supongamos que el código buscado es de la forma ABC. Entonces, de las dos primeras pistas, deducimos que el número 6 no puede formar parte del código (si lo fuera, entonces las dos frases se contradicen). Eso nos indica que con la tercera pista ya podemos deducir que el 2 y el 0 sí forman parte del código, aunque no están su lugar correcto. Pero regresando a la pista 1, donde ya estaba el número 2, conluimos que $C = 2$. Con esto, necesariamente $A = 0$ (gracias a la segunda pista, reafirmado con la quinta pista). Por último, se debe tener que $B = 4$, gracias nuevamente a la segunda pista.
Por tanto, el código es **042**. ■

10. Considere la secuencia X definida por 2, 5, 8, 11, $\cdots$, que comienza con el número 2 y luego se va sumando 3 a cada valor. Sea Y la sucesión definida por 3, 7, 11, 15, $\cdots$, que empieza con el número 3 y luego se va sumando 4 a cada valor.

Tome los 100 primeros elementos de cada sucesión. ¿Cuántos números aparecen tanto en X como en Y? ¿Es posible establecer alguna fórmula para dichos números repetidos? Justifique.

Solución: Se puede decir que la secuencia X tiene por fórmula (término general) $x_n = 2+3(n-1) = 3n-1$, con $n = 1, 2, \cdots, 100$. Por tanto, el último elemento de X es el 299.

A su vez, la sucesión Y tiene por fórmula $y_k = 3+4(k-1) = 4k-1$, con $k = 1, 2, \cdots, 100$. Con esto, el último elemento de Y es el 399.

Por otro lado, se observa que 11 es el primer elemento común, al igual que 23, 35, y 47. Estos números se forman agregando 12 al valor anterior. ¿Por qué 12? Pues es el mínimo común múltiplo entre 3 y 4 (ya que una avanza de 3 en 3, y la otra avanza de 4 en 4). Entonces, la secuencia de número repetidos R tendrá por fórmula $r_m = 11+12(m-1) = 12m-1$, con $m = 1, 2, 3, \cdots$. ¿Cuál es el mayor valor posible de m? El suficiente para que $12m-1$ no sobrepase a 299 (que es el valor extremo alcanzado por X; es decir, X llega hasta allí). Esto nos lleva a la *inecuación* $12m-1 \leq 299$, de donde se debe cumplir que

$$\begin{aligned} 12m &\leq 300 \\ \Rightarrow 2m &\leq 50 \\ \Rightarrow m &\leq 25. \end{aligned}$$

Por tanto, hay 25 números repetidos entre la secuencia X y la secuencia Y, siendo el primer elemento repetido el 11, y el último, precisamente el 299. ■