



“EL SÍ DE LA FAMILIA MARIANISTA”

UNIDAD 0 - Guía de ejercicios 02 IIP^{ROS} MEDIOS AB

Temas: Variables aleatorias finitas - Regla de Laplace

31 de marzo, 2020

Nombre: _____

En esta Guía de Ejercicios, se desarrollarán los siguientes **Objetivos de Aprendizajes** correspondientes a la Unidad 0 (año anterior):

OA10. *Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas:*

- *Definiendo la variable.*
- *Determinando los posibles valores de la incógnita.*
- *Calculando su probabilidad.*
- *Graficando sus distribuciones.*

OA11. *Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.*

OA12. *Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad:*

- *Revisando informaciones de los medios de comunicación.*
- *Identificando suposiciones basadas en probabilidades.*
- *Explicando cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas.*
- *Explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades.*

Coloque esta guía y el desarrollo (corcheteado) en su **portafolio** (carpeta). Recuerde que el portafolio en su conjunto representa una calificación al final del trimestre.

En esta Guía, se consideran los símbolos C_k^n para el número de combinaciones de k elementos de un total de n , P_k^n para el número de permutaciones de k elementos de un total de n , $\mathbb{P}(X)$ para la probabilidad del evento X , \mathbb{R} para el conjunto de los números reales, y \mathbb{N} para los números naturales (enteros positivos).

El símbolo \approx indica valor aproximado, “es aproximadamente igual a”.

Si desea tener una idea del grado de desempeño en la resolución o desarrollo de la guía, puede utilizar la siguiente escala para asignar un puntaje en cada ejercicio solicitado:

Escala de Evaluación:

- 0 No logrado, insuficiente.** No hay comprensión del problema (ejercicio), ni de los conceptos o estrategias necesarios para su desarrollo. Lo entregado no corresponde a la respuesta solicitada, ni al nivel esperado. Comete demasiados errores conceptuales y de procedimiento. Prácticamente entrega la respuesta en blanco.
- 1 Básico.** Hay una comprensión superficial del problema (ejercicio). El desarrollo entregado relaciona algunos conceptos o estrategias necesarios para desarrollar la solución, pero no los integra en función de la respuesta esperada. Comete algunos errores, ya sea conceptuales o de procedimiento.
- 2 Medio.** Existe una comprensión suficiente del problema (ejercicio) y su respuesta. Evidencia manejo de conceptos y estrategias que permitirían finalizar la solución, pese a que no termina adecuadamente. No comete errores conceptuales, quizás algunos procedimentales.
- 3 Logrado.** Lo entregado permite evidenciar competencias matemáticas esperadas para la resolución del problema o ejercicio. Finaliza satisfactoriamente, o está muy próximo a hacerlo.

SOLUCIONARIO

1. [PSU] Un estuche contiene sólo 8 lápices del mismo tipo, de los cuales 3 son azules y 5 son rojos. Si se extraen simultáneamente, al azar, 4 lápices del estuche y se define la variable aleatoria X como el número de lápices azules extraídos, ¿cuáles son todos los posibles valores de X ? Justifique.

Solución: Dado que la cantidad total de lápices azules es 3, entonces el valor máximo de X es 3. Del mismo modo, $X = 0$ es el valor mínimo, que corresponde a extraer 4 lápices rojos (lo que es posible, ya que hay 5 lápices rojos). Por tanto, $X = \{0, 1, 2, 3\}$. ■

2. [PSU] Si X es la variable aleatoria “número de caras obtenidas al lanzar tres monedas,” ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

- X es una variable aleatoria discreta
- El espacio muestral de X tiene cardinalidad 8
- El recorrido de X es $\{0, 1, 2, 3\}$
- Hay tres sucesos asociados al valor 3
- Al suceso “obtener tres sellos” se le asocia el valor 0

Justifique su respuesta.

Solución: Dado que el experimento asociado a X es lanzar tres monedas, podemos modelar el espacio muestral Ω como tríos ordenados, digamos $\Omega = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \{C, S\}\}$, es decir, cada letra a, b, c puede ser Cara o Sello. Eso nos dice que Ω tiene 8 elementos, de los cuales sólo uno corresponde a $X = 3$, que sería el evento (C, C, C) . Por tanto, la alternativa falsa es la (d). ■

3. Sea X una vad con función de probabilidad f definida por

a	-1	0	1	2
$f(a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	x	$\frac{1}{2}$

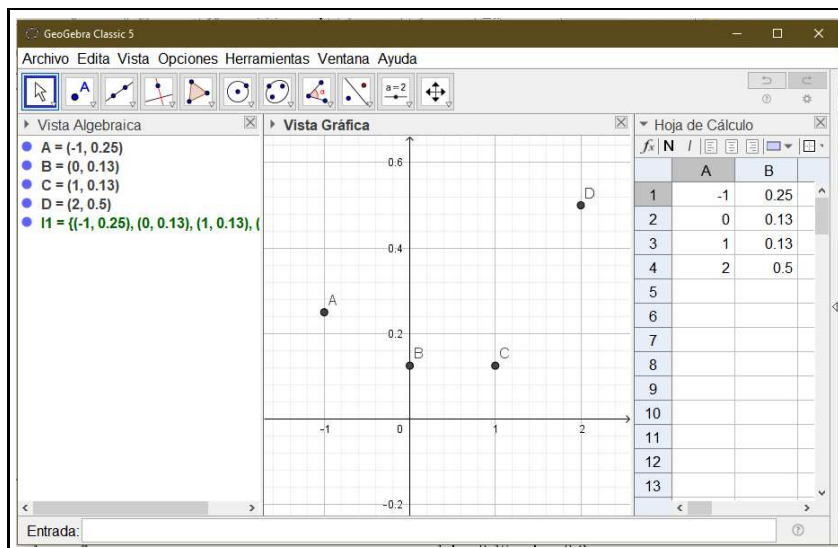
y $f(a) = 0$ para cualquier otro valor de a . Determine el valor de x y grafique la función f .

Solución: Como la suma de todos los valores de f debe ser 1, se debe cumplir que

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + x + \frac{1}{2} = 1,$$

de donde se deduce, resolviendo la ecuación en x , que el valor buscado es $x = \frac{1}{8}$.

Para realizar el gráfico de f , utilizamos los valores que aparecen en la tabla anterior (gráfico construido gracias al programa ©GeoGebra):



4. La siguiente tabla muestra la función de probabilidad y **distribución**, para una vad $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

k	$\mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{P}(X \leq k)$
0	0,02	0,02
1	0,18	0,2
2	0,15	b
3	a	0,8
4	0,2	1

Describe con sus palabras el significado de la **función distribución** para una vad. Determine los valores de a y b . Justifique.

Solución: La *función distribución* F asociada a una vad X corresponde a la función de probabilidad acumulada; es decir, $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X < a) + f(a)$, donde f es la función de probabilidad de X . Se cumple que F es una función no decreciente por cuanto siempre vamos agregando un valor no negativo. Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned}
 b &= \mathbb{P}(X \leq 2) \\
 &= \mathbb{P}(X < 2) + f(2) \\
 &= (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)) + f(2) \\
 &= (f(0) + f(1)) + f(2) \\
 &= 0,35.
 \end{aligned}$$

Del mismo modo que en la pregunta anterior, se debe cumplir que

$$0,02 + 0,18 + 0,15 + a + 0,2 = 1,$$

por tanto, $a = 0,45$. De otro modo, podríamos haber dicho que $b + a = 0,8$, y como $b = 0,35$, se deduce que $a = 0,45$. ■

5. Se saca una carta al azar de un mazo de naipes inglés de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea un 7?

Solución: Por Regla de Laplace, teniendo en cuenta que la cantidad de casos favorables es 4, y la cantidad de casos totales es 52, se tiene que la probabilidad buscada es $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. ■

6. Determine la probabilidad de ganarse el *Loto*, si se compra un juego sencillo. Justifique.

Solución: Un juego sencillo consta de 6 números elegidos de un total de 41. ¿De cuántas maneras es posible elegir un grupo de 6 números de un total de 41? Calculando $\mathbb{C}_6^{41} = 4496388$, y por tanto, la probabilidad buscada, utilizando Regla de Laplace, es $\frac{1}{4496388} \doteq 2,224 \times 10^{-7}$. ■

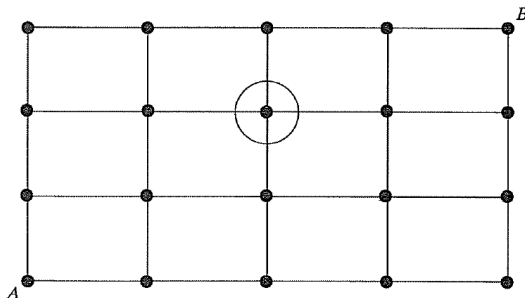
7. Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 se construyen todos los números de tres cifras distintas, y cada uno de ellos se anota en una papel que se deposita dentro de una urna. Luego, se extrae un papel al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el número obtenido sea par? Justifique.

Solución: Utilizaremos nuevamente la Regla de Laplace, y para ello debemos determinar la cantidad de casos favorables para el evento en cuestión. Es decir, saber cuántos números de tres cifras son pares, construidos con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5. Por Principio Multiplicativo, se tiene que dicho número es $3 \times 4 \times 2 = 24$, teniendo en cuenta que la cantidad de números de tres cifras distintas que se pueden formar con esos cinco dígitos es $\mathbb{P}_3^5 = 60$. Finalmente, la probabilidad buscada es $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$ (que es bastante lógico, ya que la paridad de un número sólo depende del dígito final, y hay dos números pares de un total de 5 posibles para las unidades). ■

8. Una urna contiene ocho bolitas negras y tres bolitas blancas. Si sacamos dos bolitas, sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

Solución: Supongamos que las ocho bolitas negras están numeradas del 1 al 8, y las tres bolitas blancas lo están del 9 al 11. Si modelamos el espacio muestral Ω asociado al experimento mediante casilleros dentro de un cuadrilado (básicamente pares ordenados de la forma (X, Y) , donde X puede ser N negro o B blanca, al igual que Y), teniendo en cuenta que en este cuadrilado no se considera la diagonal principal (ya que una misma bolita no puede ser extraída dos veces), se observa que hay $11^2 - 11 = 110$ resultados posibles, de los cuales $3^2 - 3 = 6$ corresponden al evento (B, B). Nuevamente, por Regla de Laplace, se tiene que la probabilidad buscada es $\frac{6}{110} = \frac{3}{55} \doteq 0,055$. ■

9. Considere el reticulado de puntos que se muestra a continuación. Suponga que comenzando desde el punto A se desea llegar hasta el punto B , con los dos únicos movimientos posibles: un paso a la derecha, o un paso hacia arriba. ¿Cuál es la probabilidad de que un camino así pase por el punto destacado en el reticulado?



Solución: Llamemos P al punto marcado en el reticulado. Usaremos Regla de Laplace; por tanto, necesitamos contar la cantidad de caminos posibles (con los dos tipos de movimientos permitidos) que hay de A hasta B . Para ello, observamos que cualquier camino debe tener 7 movimientos, siendo 4 de ellos hacia la *derecha* y tres hacia *arriba*. Eso nos dice que el total de caminos de A hasta B es el número $\mathbb{C}_3^7 = \mathbb{C}_4^7 = 35$.

De esos 35 caminos, algunos pasarán por el punto P . Para ello, contemos los caminos AP , que son $\mathbb{C}_2^4 = 6$, y luego PB , que son $\mathbb{C}_2^3 = 3$, y utilizando el Principio Multiplicativo, obtenemos que todos los caminos que van de A hasta B pasando por P son 18. Finalmente, la probabilidad solicitada es $\frac{18}{35} = 0,514$. ■

10. Busque en la prensa (escrita, medios digitales) de los últimos días alguna noticia que haga uso explícito de elementos del cálculo de probabilidades, y comente las herramientas utilizadas en dicho texto. Puede utilizar, por ejemplo, las noticias referidas a la propagación del COVID-19 y cómo las decisiones de las autoridades se sostienen en la probabilidad de contagio de la población.

La noticia y su comentario deben ir adjuntadas en el desarrollo de esta guía.

Solución: La siguiente imagen es extraída del sitio

https://www.consalud.es/pacientes/especial-coronavirus/riesgo-contagio-coronavirus-cual-probabilidad_75936_102.html

☰ MENÚ
ConSalud.es

reciente señala que este nuevo coronavirus **se puede transmitir antes de la aparición de los síntomas**.

Surge entonces la cuestión que muchos ciudadanos se plantean: ¿Qué **probabilidad de contagio existe?** De momento, la OMS estima que la tasa de contagio (R_0) del virus es de 1,4 a 2,5, aunque otras estimaciones hablan de un rango entre 2 y 3. Esto quiere decir que **cada persona infectada puede a su vez infectar a entre 2 y 3 personas**, aunque se ha visto que pueden haber "supercontagiadores", capaces de contagiar hasta a 16 personas.

CORONAVIRUS EN NIÑOS: MISMO RIESGO

Los niños tienen tanto riesgo de contraer el coronavirus como los adultos. Así lo han hecho público desde Unicef, quienes recalcan que el **nuevo coronavirus puede infectar a personas de todas las edades**. Pone como ejemplo el caso reciente de un bebé de cinco meses que dio positivo por coronavirus en Murcia.

No obstante, desde el organismo se recuerda que son los **mayores y quienes padecen algunas enfermedades** (como asma, diabetes o cardiopatías) tienen **más probabilidades de enfermarse** gravemente cuando adquieren la infección.

En lo referente a la transmisión de madre a hijos durante el **embarazo**, desde Unicef aseguran que no

En esta nota de prensa se observa que se utiliza el concepto de *probabilidad* tanto para referirse al nivel de contagio entre personas (usando el concepto de tasa de contagio), como al grupo de riesgo dentro de un grupo de personas (de ser infectados). Esto último pareciera ser la utilización del concepto de *probabilidad condicional*. ■